Juillet-Août **1980**

Revue LA RECHERCHE N° 113

Il y a .... **32** ans

quand je n'étais pas complêtement blacklisté dans toutes les revues de vulgarisation scientifique.

aucune
(à part Pour la Science, qui dépendait des Editions Belin)
N'a jamais mentionné l'existence de la Collection des Aventures d'Anselme Lanturlu.
Et aucune ne mentionne l'existence de http://www.savoir-sans-frontieres.com
où 450 albums (oct 2012) sont gratuitement téléchargeables et correspondent à la traduction des albums en 36 langues

Des mathématiques avec un fil et une aiguille

La topologie est une branche des mathématiques qui étudie, entre autres, les possibilités de déformations continues des surfaces, ou homotopies. Certains de ses aspects très surprenants sont restés méconnus pendant longtemps. Ainsi, dès 1957, en utilisant un formalisme très abstrait, Stephen Smale démontrait qu'il devait être possible de retourner une sphère, sans la plier, sans faire de trou, c'est-à-dire en conservant la régularité de la surface, à condition de lui permettre de s'autotraverser librement. Il a tout de même fallu vingt ans pour que l'on décrive la suite de déformations permettant de réaliser l'opération prédite par Smale.

On assiste actuellement à un regain d'intérêt, de la part des mathématiciens, pour ces aspects méconnus de la théorie des surfaces. Depuis, plusieurs variantes des retournements de la sphère et du tore ont été trouvées. Dans la même veine, on conte ici ce qui se passe lorsqu'on cherche à coudre ensemble un ruban de Möbius et un disque.

Un monde fantomatique.

Il est dit dans la Bible que, lors du Jugement dernier, les humains ressusciteront sous forme de *corps glorieux*. Ces enveloppes corporelles auront alors la propriété de pouvoir traverser les matériaux librement, et de se... traverser elles-mêmes.

Lorsque deux *corps glorieux* iront à la rencontre l'un de l'autre, ils n'auront pas besoin de changer de trottoir pour se croiser. Ces êtres fantômatiques pourront aussi désigner un objet situé derrière leur dos, sans avoir à se retourner. Il leur suffira pour cela de pointer leur index vers leur nombril et de s'autotraverser.

L'intuition spatiale des humains changera alors, car, mathématiquement parlant, leur monde sera devenu celui des *immersions*.

On appelle de ce nom imagé, les étapes de la transformation d'une surface qui autorisent les croisements de nappes, mais excluent les trous ou les plis, accidents qui introduisent une discontinuité.

En attendant cette époque bénie, les mathématiciens explorent par la pensée ces mondes futurs aux propriétés déconcertantes. Il a ainsi été démontré en 1957, par Stephen Smale, que les fantômes pouvaient se retourner complètement. Supposons que l'enveloppe corporelle de notre fantôme, de nature sphérique ou torique, présente une coloration qui soit par exemple verte sur la face externe et rouge sur la face interne. La surface étant bien entendu connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant. Par un jeu subtil d'autotraversements, ces fantômes peuvent se retourner complètement, c'est-à-dire présenter une coloration uniforme rouge à l'extérieur.

L'intuition humaine est mal préparée à ce genre d'idée. Nous touchons ici à un domaine très étrange des mathématiques de notre temps. L'homme a construit des outils (de langage) très performants, dans le domaine de la topologie, qui lui permettent précisément de démontrer que de telles choses sont possibles. Il reste ensuite à trouver comment s'y prendre. Ce n'est pas toujours chose aisée. Smale avait donné la démonstration du retournement de la sphère, sous forme d'un théorème. Il fallut près de dix ans pour que des mathématiciens comme A. Shapiro, A. Phillips, M. Froissart et B. Morin élaborent ce que l'on pourrait appeler des *monstrations.*

Dessin de J.-P. Petit.

Les préparatifs avant d'enfiler l'aiguille.

Le problème qui va être évoqué ici est de même nature. Sur la figure 1 nous avons deux objets: une bande de Möbius et un disque. Ce sont des surfaces à bord. Nous remarquerons tout de suite que ces bords sont d'un seul tenant. Pouvons-nous réunir ces surfaces, les coudre ensemble, en respectant la continuité du plan tangent, et si oui, qu'obtient-on?

Dans le monde fantômatique, c'est-à-dire en suivant la règle du jeu des immersions, le mathématicien répondra aussitôt: « Cela est possible, et le résultat sera la surface inventée par le mathématicien Werner Boy en 1901. » La surface de Boy est un étrange coquillage unilatère, qui mériterait l'appellation de trigorneau. Sa description analytique ne fut trouvée, par B. Morin, qu'en 1978. La surface de Boy est visible sur la figure 12. Elle a une symétrie ternaire. Morin me suggéra de donner à la bande de Möbius une symétrie du même ordre. Ce qui me permit d'élaborer la solution du problème posé. Cette première opération pourra être comprise même du lecteur non initié. En recollant sur elle-même une bande de papier, il pourra confectionner la bande de la figure 2, et la déformer suivant l'image 2 A. Une opération d'autotraversement l'amènera à la configuration 2 B. Le lecteur pourra simuler ceci

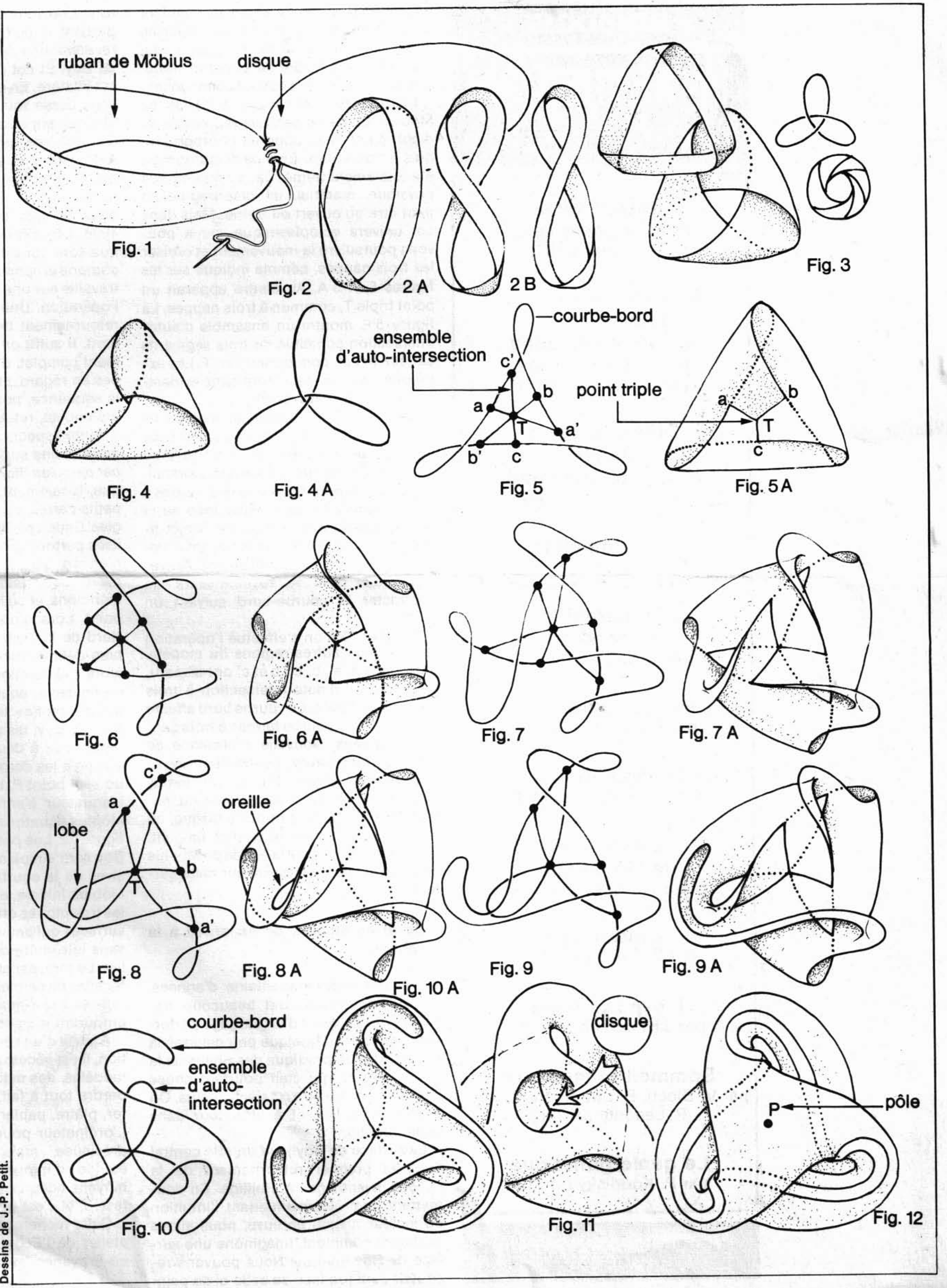

Fig. 1 Fig. 2 2 A 2 B Fig. 3 Fig. 4 Fig. 4 A Fig. 5 Fig. 5 A Fig. 6 Fig. 6 A Fig. 7 Fig. 7 A Fig. 8 Fig. 8 A Fig. 9 Fig. 9 A Fig. 10 Fig. 10 A Fig. 11 Fig. 12

Dessins de J.-P. Petit.

en coupant la bande et en la recollant immédiatement. Celle-ci se déforme alors aisément suivant la figure 3, qui présente bien l'ordre de symétrie voulu. C'est ici que les choses vont commencer.

Elargissons maintenant la bande de Möbius. La partie centrale ressemble au diaphragme d'un appareil photographique, à trois volets. En 4 ce diaphragme a été totalement fermé. Dans notre monde physique, matériel, un diaphragme ne peut être qu'ouvert ou fermé. Mais dans cet univers ectoplasmique, nous pouvons poursuivre le mouvement et croiser les trois nappes, comme indiqué sur les figures 5 et 5 A. Au centre apparaît un point triple T, commun à trois nappes. La figure 5 B montre un ensemble d'auto-intersection constitué de trois segments aa', bb' et cc', concourants en T. Les extrémités de ces segments sont évidemment sur la courbe-bord.

En 6 et 6 A la bande de Möbius va continuer de se développer suivant trois espèces de corolles, et le coquillage continue de croître en s'autotraversant. En 8 et 8 A la poussée d'une des nappes a donné naissance au premier lobe de la courbe d'auto-intersection de l'objet final. Les dessins 9 et 9 A montrent comment se poursuit ce mouvement d'enveloppement dont le résultat sera de contracter la courbe-bord suivant un cercle.

En 10 et 10 A on a effectué l'opération sur les deux autres regions du modèle. Les points a, a', b, b', c et c' ont disparu, et la courbe d'auto-intersection à trois lobes est achevée. La courbe bord affecte la forme d'une courbe fermée à trois ganses incurvées. Nouvelle croissance de cette surface, avec contraction de la courbe-bord (figure 11). Il est temps maintenant de réunir, en les cousant, notre bande de Möbius et notre disque, en respectant la continuité du plan tangent. On a représenté en 12 la bande de Möbius telle qu'elle peut s'inscrire sur cette surface.

De fil en aiguille, on en arrive à la sphère.

Pendant une cinquantaine d'années, les mathématiciens ont beaucoup travaillé pour se doter d'un langage performant. On a ainsi quelque peu délaissé la représentation physique des objets de la géométrie, ce qui était pourtant chose commune jusqu'au XIXe siècle inclus. On assiste actuellement à un retour dans cette direction.

La surface de Boy joue un rôle central dans le premier retournement de la sphère inventé par A. Phillips. En soumettant peut-être maintenant l'intuition du lecteur à rude épreuve, nous allons expliquer comment. Imaginons une surface de Boy épaisse. Nous pouvons recouvrir l'unique face de celle-ci de peinture. Enlevons maintenant la surface en gardant la peinture. Nous obtenons un *revêtement à deux feuillets* de la surface de Boy. Et cet objet est... une sphère! Il est bilatère. En effet, une de ses faces est sans cesse tournée vers le volume anciennement occupé par cette surface de Boy épaisse que nous avons dissoute. A. Phillips a montré comment la sphère ordinaire pouvait, par autotraversement, se configurer suivant ce revêtement à deux feuillets, dans un article publié en 1966. Les difficultés de codage graphique sont considérables, et bien peu ont compris la démarche de Phillips. L'auteur travaille sur une version plus explicite de l'opération. Une fois celle-ci réalisée, le retournement de la sphère devient évident. Il suffit en effet, par autotraversement complet, d'échanger les deux nappes en regard, et de reprendre à rebours la séquence, pour tomber sur la sphère antipodale, retournée.

Autre aspect curieux: lorsqu'on cartographie une surface, on cherche à y tracer deux familles de courbes, de manière que, localement, le maillage donne des petits carrés, ou à la rigueur des rectangles. Cette opération ne peut pas être réalisée partout sur une sphère, de manière bien régulière. A telle enseigne que nous avons deux pôles, où concourrent les méridiens, et où le parallèle se réduit à un point. Lorsqu'on est debout sur le pôle Nord de la Terre, si la latitude (90°) est bien définie, par contre la longitude est alors indéterminée. La sphère possède un équateur, équidistant des pôles. Lorsqu'on « replie » la sphère suivant la surface de Boy, les points antipodaux viennent, deux à deux, en coïncidence. Par exemple les deux pôles se retrouvent en un seul point P, indiqué sur la figure 12. L'équateur s'enroule sur un ruban de Möbius équatorial, qu'on peut voir sur la figure 12. Les parallèles de la surface de Boy sont simplement les étapes successives de la courbe bord de la bande de Möbius initiale, et les méridiens en sont les trajectoires orthogonales. Il existe des surfaces qui peuvent être cartographiées sans introduire de pôle, de point singulier. Le tore, par exemple, à l'aide de deux familles de cercles. Les premiers sont parallèles à la « jante » du tore, les seconds entourant le bandage.

A partir d'un certain stade de complication, il est nécessaire de travailler sur des modèles, des maquettes, pour ne pas se perdre tout à fait. Pâte à modeler, fil de fer, plâtre, papier, grillage, tout est bon. L'ordinateur pourrait apporter une aide précieuse, mais, en France, aucune équipe d'informaticiens disposant de moyens adéquats ne s'est encore manifestée, et c'est dommage.

Cette recherche se poursuit dans mon atelier de l'École des beaux-arts d'Aix-en-Provence, avec l'aide des étudiants.

Jean-Pierre Petit.