Champ gravitationnel d'un point de masse

dans la théorie d'Einstein

Par Karl SCHWARZSHILD

Document Version ~~0.0 du 25/05/2017~~
1.0 du 07/03/2024
Traduit des documents originaux en Allemand

Par H.TRACCARD

Corrections (en rouge) de D. PETEL

§1. Mr. Einstein, dans son travail sur le périhélie du mouvement de Mercure (voir Sect. 18 Novembre 1915) pose le problème d'un point qui se déplace selon l'équation suivante :

$$\begin{cases} \delta \int ds = 0\,, \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \tag{1}$$

Où les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des variables x qui doivent varier du début à la fin du chemin d'intégration

Le point se déplace donc en résumé, sur une ligne géodésique dans la direction indiquée par l'élément linéaire ds.

La mise en œuvre de la variation donne les équations de mouvement du point.

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu,\nu} \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\,, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

où

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_\beta g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) \tag{3}$$

Et $g^{\alpha\beta}$ est le sous-déterminant normalisé des coordonnées $g_{\alpha\beta}$ dans le déterminant $|g_{\mu\nu}|$.

C'est d'après la théorie d'Einstein, le mouvement d'un point sans masse dans le champ gravitationnel d'une masse située au point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, quand les composantes du champ gravitationnel sont partout définies, à l'exception du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ de l'équation de champ.

On devra satisfaire les conditions

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\, \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \qquad = 0 \tag{4}$$

et en même temps l'équation du déterminant .

$$|g_{\mu\nu}| = -1 \tag{5}$$

Les équations de champ associées à l'équation du déterminant ont la propriété fondamentale qu'elles conservent leur forme par la substitution de toute autre variable à la place de x_1, x_2, x_3 , x_4 seulement si le déterminant de substitution est égal à 1.

Les coordonnées x_1, x_2, x_3 doivent être orthogonales et x_4 désigner le temps, la masse au point zéro doit être temporellement invariable et le mouvement à l'infini être rectiligne uniforme, et selon M. Einstein (a. a. O. S. 833) satisfaire aussi aux conditions suivantes:

1. Toutes les composantes sont indépendantes du temps x_4.

2. Les équations $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ s'appliquent exactement avec $\rho = 1, 2, 3$.

3. La solution est spatialement symétrique par rapport l'origine du système de coordonnées dans le sens où on retrouve la même solution quand on soumet x_1, x_2, x_3 à une transformation orthogonale (Rotation).

4. Les $g_{\mu\nu}$ disparaissent à l'infini, à l'exception de quatre $g_{\mu\nu}$:

$$g_{44} = 1\, , g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

Le problème est de trouver un élément linéaire avec des coefficients tels que les équations de champ, l'équation du déterminant et ces quatre conditions soient satisfaites..

§ 2. Mr. Einstein a montré que ce problème conduit, dans une première approximation, à la loi newtonienne, et que en deuxième approximation elle restitue correctement l'anomalie du périhélie Mercure

Le calcul qui va suivre fournira la solution exacte du problème. Il est toujours plus agréable d'avoir des solutions exactes.

Plus important encore, ce calcul en révélant la solution exacte montre que si on avait des doutes sur le travail de M. Einstein à cause des difficultés dues à la procédure d'approximation, alors les lignes suivantes contribueront au contraire à rendre le travail de M. Einstein encore plus lumineux.

§ 3. Si on appelle t le temps, x, y , z les coordonnées cartésiennes alors l'élément linéaire le plus commun, qui répond aux exigences 1-3 devrait être le suivant :

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

Où F,G,H sont des fonctions de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
La condition (4) entraine que pour $r = \infty$ on a F=G=1 et H=0
Quand on passe en coordonnées polaires

$$x = r\sin(\vartheta)\cos(\phi)\,, y = r\sin(\vartheta)\sin(\phi)\,, z = r\cos(\vartheta)$$

On obtient le même élément linéaire :

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2(\vartheta)\,d\phi^2) - Hr^2dr^2$$
$$ds^2 = Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\phi^2) \quad (6)$$

Mais le volume élémentaire exprimé en coordonnées polaires est égal à $r^2\sin(\vartheta)\,dr\,d\vartheta\,d\phi$ et le déterminant fonctionnel de l'ancien avec les nouvelles coordonnées $r^2\sin(\vartheta)$ est différent de 1; donc les équations de champ ne seraient pas inchangée si l'on calculait avec ces coordonnées polaires et une transformation lourde devrait être effectuée. Cependant, une astuce simple permet de surmonter cette difficulté. On pose :

$$x_1 = \frac{r^3}{3}\,,\; x_2 = -\cos(\vartheta)\;, x_3 = \phi \quad (7)$$

Ensuite, pour le volume élémentaire $r^2dr\sin(\vartheta)\,d\vartheta\,d\phi = dx_1\,dx_2\,dx_3$. Les nouvelles variables sont donc des coordonnées polaires du déterminant 1. Ils ont les avantages évidents des coordonnées polaires pour le traitement du problème et, en même temps restent inchangées pour les équations de champ et le déterminant quand on prend encore $t = x_4$.
Dans les nouvelles coordonnées polaires, l'élément linéaire est :

$$ds^2 = Fdx_4^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}\right)dx_1^2 - Gr^2\left(\frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} + dx_3^2(1 - x_2^2)\right), \quad (8)$$

Pour lequel nous écrirons :

$$ds^2 = f_4dx_4^2 - f_1dx_1^2 - f_2\frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} - f_3dx_3^2(1 - x_2^2)\,, \quad (9)$$

Ensuite, $f_1, f_2, = f_3\,, f_4$ sont trois fonctions devant remplir les conditions suivantes

1. Pour $x_1 = \infty$: $f_1 = \frac{1}{r^4} = (3x_1)^{-\frac{4}{3}}\,, f_2 = f_3 = r^2 = (3x_1)^{\frac{2}{3}}\,, x_4 = 1$
2. L'équation du déterminant: $f_1 * f_2 * f_3 * f_4 = 1$
3. Les équations de champ.
4. les fonctions f continues en dehors de $x_1 = 0$

§ 4. Pour établir les équations de champ, on doit d'abord calculer les composantes du champ gravitationnel correspondant à l'élément linéaire (9) .

Cela se fait facilement en écrivant les équations différentielles de la ligne géodésique. Le calcul de la variation aboutit directement à ces composantes. Les équations différentielles de la ligne géodésique pour l'élément linéaire (9) sont donc données par :

$$0 = f_1 \frac{d^2x_1}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{1}{1-x_2^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + (1-x_2^2)\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right)$$

$$0 = \frac{f_2}{1-x_2^2}\frac{d^2x_2}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{1}{1-x_2^2}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \frac{f_2x_2}{(1-x_2^2)^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + f_2x_2\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2$$

$$0 = f_2(1-x_2^2)\frac{d^2x_3}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1-x_2^2)\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds} - 2f_2x_2\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds}$$

$$0 = f_4\frac{d^2x_4}{ds^2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds}$$

La comparaison avec (2) donne les composantes du champ gravitationnel

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \qquad \Gamma_{22}^1 = +\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{1}{1-x_2^2},$$

$$\Gamma_{33}^1 = +\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1-x_2^2),$$

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1},$$

$$\Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \qquad \Gamma_{22}^2 = -\frac{x_2}{1-x_2^2}, \qquad \Gamma_{33}^2 = -x_2(1-x_2^2),$$

$$\Gamma_{31}^3 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \qquad \Gamma_{32}^3 = +\frac{x_2}{1-x_2^2},$$

$$\Gamma_{41}^4 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1},$$

(les autres zéro).

Dans le cas de la symétrie de rotation autour du point zéro, il suffit de former les équations de champ uniquement pour l'équateur ($x_2 = 0$), ainsi , comme on différencie une seule fois ~~l'expression précédente $1 - x_2^2$~~ . Le calcul des équations de champ s'écrit alors

(*)

$$\text{a)}\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$\text{b)}\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 2 + \frac{1}{f_1f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$\text{c)}\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1f_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2,$$

(*) : , on peut mettre $1 - x_2^2$ égal à 1 partout dans les expressions ci-dessus.

Outre ces trois équations, les fonctions f_1, f_2, f_4 doivent toujours satisfaire l'équation du déterminant

$$d)\quad f_1 f_2^2 f_4 = 1 \qquad soit: \quad \frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{2}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0$$

Je laisse le premier (b) et m'occupe des trois fonctions (a), (c) et (d).
(c) peut être mis sous la forme :

$$C')\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}$$

Qui peut être directement intégré et donne :

$$C'')\qquad \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1 \qquad (\alpha \text{ constante d'intégration})$$

L'addition de (a) et de (c') donne

$$\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2$$

Qui associé à (d) nous donne

$$-2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 3\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2$$

En intégrant on a

$$\frac{1}{\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}} = \frac{3}{2}x_1 + \frac{\rho}{2} \qquad (\rho\ est\ une\ constante\ d'intégration)$$

Soit encore

$$\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{2}{3x_1 + \rho}$$

Et en intégrant encore une fois

$$f_2 = \lambda(3x_1 + \rho)^{\frac{2}{3}} \qquad (\rho\ est\ une\ constante\ d'intégration)$$

La condition à l'infini entraine que λ=1 et ainsi on a

$$f_2 = (3x_1 + \rho)^{\frac{2}{3}} \tag{10}$$

Il découle de (c'') et (d)

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1 f_4 = \frac{\alpha}{f_2^2} = \frac{\alpha}{(3x_1 + \rho)^{\frac{2}{3}}}$$

On intègre en tenant compte de la condition à l'infini

$$f_4 = 1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-\frac{1}{3}} \tag{11}$$

Et en plus d'après (d)

$$f_1 = \frac{(3x_1 + \rho)^{-\frac{4}{3}}}{1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-\frac{1}{3}}} \tag{12}$$

L'équation (b), qui peut être facilement recalculée, est complétée avec les expressions trouvées de f_1 *et* f_2.
Ainsi, toutes les conditions sont satisfaites sauf celle de la continuité.
f_1 devient discontinu quand.

$$\alpha(3x_1+\rho)^{-\frac{1}{3}}=1 \quad soit\ quand\ \ 3x_1=\alpha^3-\rho$$

Pour que cette discontinuité coïncide avec l'origine, il faut donc que

$$\rho=\alpha^3 \tag{13}$$

La condition de continuité lie ainsi les deux constantes d'intégration ρ et α. La solution complète de notre problème est maintenant est donnée par:

$$f_1=\frac{1}{R^4}\frac{1}{1-\frac{\alpha}{R}} \quad , \ \mathrm{f}_2=\mathrm{f}_3=\mathrm{R}^2 \quad , \qquad f_4=1-\frac{\alpha}{R}$$

dans lequel la variable auxiliaire

$$R=(3x_1+\rho)^{\frac{1}{3}}=\left(r^3+\alpha^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

est introduite.

Si nous remplaçons ces valeurs des fonctions f dans l'expression (9) et revenons en même temps aux coordonnées polaires ordinaires, on obtient alors l'expression de la solution exacte du problème d'Einstein.

$$ds^2=\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)dt^2-\frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}}-R^2(d\vartheta^2+\sin^2(\vartheta)\,d\phi^2)\ , \qquad R=(r^3+\alpha^3)^{\frac{1}{3}}\ , \tag{14}$$

la constante α dépend de la masse au point zéro

§ 5. L'unicité de la solution a été prouvée par le calcul ci-dessus . Cette unicité est apparue d'elle-même avant que la condition de continuité ne fut posée .Le fait qu'il soit difficile de reconnaître l'unicité d'une méthode d'approximation selon la méthode de M. Einstein se trouve dans ce qui suit.

$$f_1=\frac{(3x_1+\rho)^{-\frac{4}{3}}}{1-\alpha(3x_1+\rho)^{-\frac{1}{3}}}=\frac{(r^3+\rho)^{-\frac{4}{3}}}{1-\alpha(r^3+\rho)^{-\frac{1}{3}}}$$

Si α et ρ sont faibles, le développement en série donne jusqu'à deux ordres de grandeur:

$$f_1=\frac{1}{r^4}\left[1+\frac{\alpha}{r}-\frac{4}{3}\frac{\rho}{r^3}\right]$$

Cette expression, ainsi que celles de f_2, f_3, f_4 développées de manière similaire, satisfait avec la même précision à toutes les exigences du problème.

L'exigence de continuité n'ajoute rien de nouveau à cette approximation car les discontinuités ne se produisent qu'au point zéro. Si les deux constantes α et ρ étaient arbitraires, cela rendrait le problème physiquement indéterminé. La solution exacte montre que en continuant les approximations, la discontinuité ne se produit pas au point zéro, mais au point $r = (\alpha^3 - \rho)^{\frac{1}{3}}$ quand $\rho = \alpha^3$ et nous devons donc ajuster les coefficients α et ρ pour que la discontinuité se déplace au point zéro.

§ 6. Enfin, le calcul du mouvement d'un point dans le champ gravitationnel consiste à dériver la ligne géodésique appartenant à l'élément linéaire (14). D'après les trois conditions, l'élément linéaire est homogène dans les différentielles et ses coefficients sont indépendants de t et de ρ, la variation aboutit immédiatement à trois intégrales intermédiaires.
Si nous nous limitons au mouvement dans le plan de l'équateur ($\vartheta = 90°$, $d\vartheta = 0$), alors ces intégrales intermédiaires sont:

$$\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1-\frac{\alpha}{R}}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = const = h\,, \tag{15}$$

$$R^2\frac{d\phi}{ds} = const = c\,, \tag{16}$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\frac{dt}{ds} = const = 1\ (Définition\ de\ l'unité\ de\ temps). \tag{17}$$

D'où il découle

$$\left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2 + R^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right) = \frac{R^4}{c^2}\left[1-h\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\right]$$

Ou encore avec $\frac{1}{R} = x$

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3 \tag{18}$$

Si l'on introduit les termes: $\frac{c^2}{h} = B, \frac{1-h}{h} = 2A$ c'est identique avec l'équation (11)(1) de M. Einstein et donne l'anomalie observée du périhélie de Mercure. Malgré tout, l'approche de M. Einstein du calcul de la géodésique est compatible avec la solution exacte ,si nous entrons r au lieu de la valeur

$$^1R = (r^3+\alpha^3)^{\frac{1}{3}} = r\left(1+\frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(1) Je n'ai pas le texte de cette référence

Puisque $\frac{\alpha}{r}$ est proche de deux fois le carré de la vitesse planétaire (en prenant pour unité de vitesse celle de la lumière), pour Mercure l'ordre de grandeur est de 10^{-12} . Ainsi, pratiquement R est identique à r et l'approche de M. Einstein est suffisante au-delà des besoins de la pratique courante.
Enfin, pour les trajectoires circulaires l'expression exacte de la troisième loi Kepler doit pouvoir en être déduite.
Pour la vitesse angulaire $n = \frac{d\phi}{dt}$, selon (16) et (17), si on prend $x = \frac{1}{R}$

$$n = cx^2(1 - \alpha x)$$

Pour les trajectoires circulaires, $\frac{dx}{d\phi}$ et $\frac{d^2x}{d\phi^2}$ doivent être égaux à zéro. Selon (18)

$$0 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3 \quad , \quad 0 = \frac{h\alpha}{c^2} - 2x + 3\alpha x^2$$

L' élimination de h dans ces deux équations nous donne

$$\alpha = 2c^2x(1 - \alpha x)^2$$

D'où il découle

$$n^2 = \frac{\alpha}{2}x^3 = \frac{\alpha}{2R^3} = \frac{\alpha}{2(r^3 + \alpha^3)}$$

Jusqu'à la surface du soleil, l'écart de cette formule à la troisième loi Kepler est totalement imperceptible. Mais pour un point de masse idéal la vitesse angulaire ne se prolonge pas continument comme dans la loi de Newton lorsque le rayon de l'orbite diminue, mais s'approche d'une limite égale à :

$$n_0 = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$$

(Pour un point de masse solaire, la limite de fréquence est d'environ 10^4 par seconde.) S'il existait des lois similaires pour les forces moléculaires, cette propriété pourrait être intéressante).